مذكرة

وحبر

العلاقة بين متغيرين و الاحصاء

الصف الثانى الاعدادى

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

- العلاقة بين متغيرين
- ميل الخط المستقيم

الاحصـــاء

- جمع البيانات وتنظيمها
- الوسط الحسابى
- الوســيط
- المنـــوال

الوحدة الثانية : العلاقة بين متغيرين

دراسة العلاقة بين متغيرين :-

هى علاقة من الدرجة الاولى بين متغيرين س ، ص وتكون على الصورة
م س + ب ص = جـ حيث م ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، م ، ب كلاهما ≠ الصفر
ويوجد عدد لا نهائى من الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة والتى عند تمثيلها بيانياً تكون خط مستقيم ولذلك سميت بالعلاقة الخطية

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س + ص = ٥

الحــــــل

س + ص = ٥ ص = ٥ ــ س

عندما س = ١ ص = ٥ ــ ١ = ٤ الزوج (١ ، ٤) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = ٥ ــ ٢ = ٣ الزوج (٢ ، ٣) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = ٥ ــ ٣ = ٢ الزوج (٣ ، ٢) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص ــ س = ٣

الحــــــل

ص ــ س = ٣ ص = ٣ + س

عندما س = ١ ص = ٣ + ١ = ٤ الزوج (١ ، ٤) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = ٣ + ٢ = ٥ الزوج (٢ ، ٥) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = ٣ + ٣ = ٦ الزوج (٣ ، ٦) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص ــ ٢ س = ٥

الحــــــل

ص ــ ٢ س = ٥ ص = ٥ +٢س

عندما س=١ ص=٥+٢(١) = ٥+٢ = ٧ الزوج (١، ٧) يحقق العلاقة

عندما س=٢ ص=٥+٢(٢) = ٥+٤ = ٩ الزوج (١، ٩) يحقق العلاقة

عندما س=٣ ص=٥+٢(٣) = ٥+٦ = ١١ الزوج (١، ١١)يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = ٣

الحــــــل

العلاقة لم تشترط أى قيمة لـ س فتكون الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة هى جميع الازواج المرتبة التى فيها ص = ٣ وأى قيمة للمتغير س مثل

(١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣) .... الخ

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س = ٤

الحــــــل

العلاقة لم تشترط أى قيمة لـ ص فتكون الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة هى جميع الازواج المرتبة التى فيها س = ٤ وأى قيمة للمتغير ص مثل

(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، ....الخ

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س +٢ص = ٧

الحــــــل

س + ٢ ص = ٧ س = ٧ ــ ٢ ص

عندما ص=١ س= ٧ -٢(١) = ٧ ــ ٢ = ٥ (٥ ، ١) يحقق العلاقة

عندما ص=٢ س= ٧ -٢(٢) = ٧ ــ ٤ = ٣ (٣، ٢) يحقق العلاقة

عندما ص=٣ س= ٧ -٢(٣) = ٧ ــ ٦ = ١ (١ ، ٣) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س

الحــــــل

عندما س = ١ ص = ١ (١ ، ١) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = ٢ (٢ ، ٢) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = ٣ (٣ ، ٣) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = -٣

الحـــــــل

عندما س = ١ ص = -٣ (١ ، -٣) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = -٣ (٢ ، -٣) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = -٣ (٣ ، -٣) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س = ٥

الحـــــــل

عندما ص = ١ س = ٥ (٥ ، ١) يحقق العلاقة

عندما ص = ٢ س = ٥ (٥ ، ٢) يحقق العلاقة

عندما ص = ٣ س = ٥ (٥ ، ٣) يحقق العلاقة

مثـــال : بين أيا من الازواج التالية يحقق العلاقة ص ــ ٢س = ٣

(١ ، ٢) ، (٤ ، ١١) ، (٢ ، ٥)

الحـــــــل

بالتعويض بالزوج (١ ، ٢) فى العلاقة [س = ١ ، ص = ٢]

ص ــ ٢ س = ٢ ــ ٢ (١) = ٢ ــ ٢ = ٠ ≠ ٣ الزوج (١ ، ٢) لا يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج (٤ ، ١١) فى العلاقة [س = ٤ ،، ص = ١١]

ص ــ ٢ س = ١١ ــ ٢ (٤) = ١١ ــ ٨ = ٣ الزوج (٤ ، ١١) يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج (٢ ، ٥) فى العلاقة [س = ٢ ، ص = ٥]

ص ــ ٢ س = ٥ ــ ٢ (٢) = ٥ ــ ٤ = ١ ≠ ٣ الزوج (٢ ، ٥) لا يحقق العلاقة

مثـــال : إذا كان الزوج (ك ، ٢) يحقق العلاقة ٣س + ص = ١٧ أوجد قيمة ك

الحـــــــل

٣ س + ص = ١٧ ⇐ ٣ (ك) + ٢ = ١٧

٣ ك = ١٧ ــ ٢ ⇐ ٣ ك = ١٥ ⇐ ك = ٥

مثـــال : إذا كان الزوج (٢ ، ٣) يحقق العلاقة ك س ــ ٤ ص = ١٠ أوجد قيمة ك

الحـــــل

بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٣

فى العلاقة ك س ــ ٤ ص = ١٠ ⇐ ك (٢) ــ ٤ (٣) = ١٠

٢ك ــ ١٢ = ١٠ ⇐ ٢ك = ١٠ + ١٢

٢ ك = ٢٢ ⇐ ك = ١١

التمثيل البيانى للعلاقة الخطية

لتمثيل العلاقة الخطية بيانيا نقوم بتعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ونتأكد من وقوعها على خط مستقيم واحد ويمكن تعيين زوجين فقط ولكن الزوج الثالث للتأكيد ثم نصل بين هذه النقط مع مد الخط فى الاتجاهين حتى نكون خط مستقيم

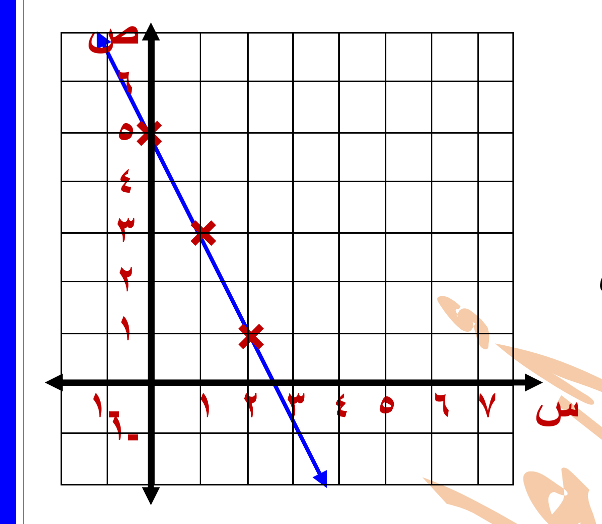
مثـــال : مثل بيانيا العلاقة ٢س + ص = ٥

الحـــــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ٢س + ص = ٥

ويمكن تعديل العلاقة على الشكل ص= ٥ ــ ٢س

س	٠	١	٢
ص	٥	٣	١



مثـــال : مثل بيانيا العلاقة ص ــ ٢ س = ١

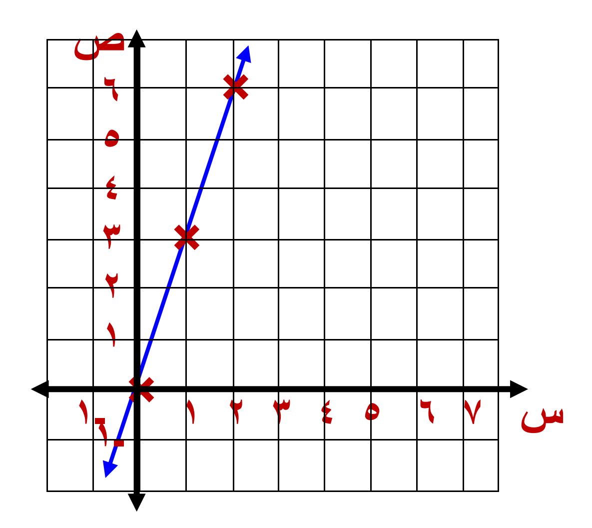
الحـــــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة ص ــ ٢ س = ١

ويمكن تعديل العلاقة على الشكل ص = ١ +٢س

س	٠	١	٢
ص	١	٣	٥

مثـــال : مثل بيانيا العلاقة : ص – ٣س = ٠



الحـــــــل

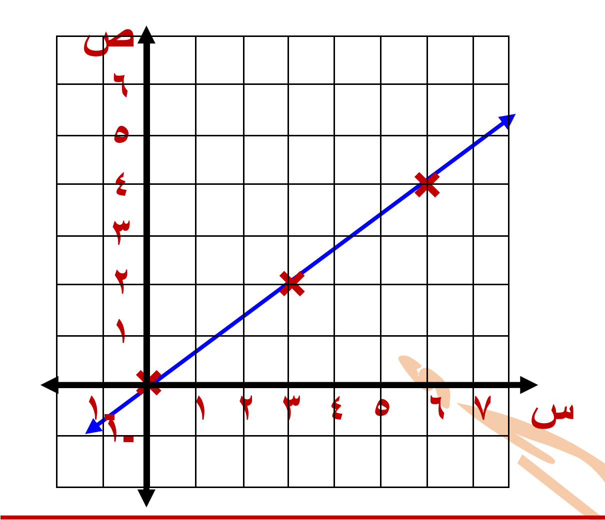
لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ص – ٣ س = ٠

العلاقة على الشكل : ص = ٣ س

س	٠	١	٢
ص	٠	٣	٦

مثـــال : مثل بيانيا العلاقة : ص – $\frac{٢}{٣}$ س = ٠



الحـــــــل

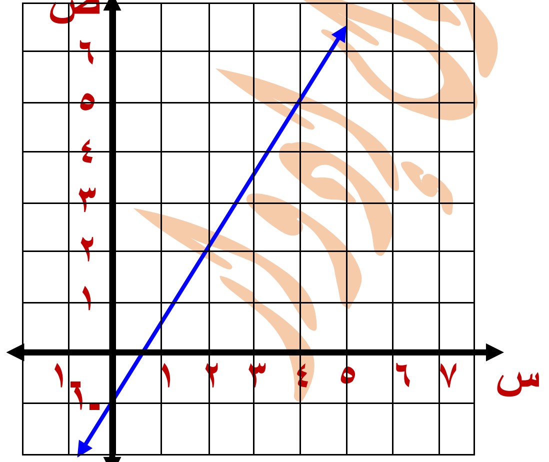
لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ص – $\frac{٢}{٣}$ س = ٠

تعديل العلاقة على الشكل ص = $\frac{٢}{٣}$ س

س	٠	٣	٦
ص	٠	٢	٤

مثـــال : الرسم المقابل هو الرسم البيانى لاحدى العلاقات الخطية بأستخدام هذا التمثيل أكمل الازواج المرتبة التالية



(١) (٠ ، ......)

(٢) (..... ، ٥)

(٣) (٢ ، ......)

(٤) (...... ، ٣,٥)

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)

الحـــــل

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى ضعف الاحداثى السينى

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢ س

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧)

الحـــــل

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى يزيد عن ضعف الاحداثى السينى

بمقدار الوحدة ∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢ س +١

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٢)

الحـــــل

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى ثابت ويساوى ٢

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (٣ ، ١) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦)

الحـــــل

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى السينى ثابت ويساوى ٣

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى س = ٣

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٨)

الحـــــل

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى يقل عن ثلاث أمثال الاحداثى

السينى بمقدار الوحدة ∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٣س ــ ١

مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٩) ، (٨ ، ١٢)

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى = $\frac{٣}{٢}$ × الاحداثى السينى

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى : ص = $\frac{٣}{٢}$ س

تمارين على العلاقة بين متغيرين

[١] أكمل الازواج المرتبة الاتية التى تحقق العلاقة ص = ٢ س +١

(٥ ، .....) ، (...... ، ٢١) ، (٠ ، .....) ، (...... ، -٥) ، (٤ ، .....)

[٢] بين أيا من الازواج المرتبة الاتية تحقق العلاقة ص = ٣س +٢

(أ) (١ ، ٧) (ب) (٤ ، ١٤) (جـ) (٠ ، ٤) (ء) (-١ ، -١)

[٣] أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقات الاتية

(أ) ص = س +١ (ب) ص = ٣س – ٤

(جـ) ص – ٥ س = ١ (ء) ٢ص – س = ٧

(هـ) ٢ص +٣ س = ٧ (و) ٢ص = ٣س

[٤] بأستخدام العلاقات الخطية أكمل الجدول التالى

(أ) ص – س = ١ (ب) ص – ٣ س = ٢

س	٠	١	٢	٣	٤
ص					

س	٠	١	٢	٣	٤
ص					

(جـ) ص = ٣س (ء) ص + ١ = ٢س

س	١		٣		٥
ص		٦		٢١	

س	٠		٢		٩
ص		٥		٧	

[٥] إذا كانت ص – ٣ س = ٢ فأوجد

(أ) قيمة ص عندما س = ٢ (ب) قيمة ص عندما س = -٤

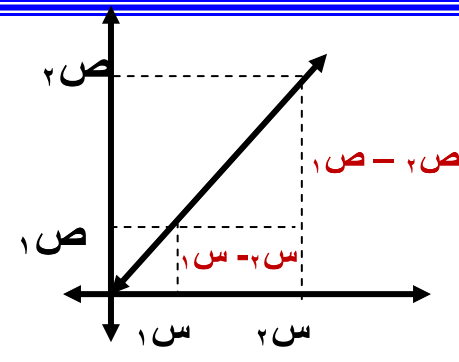
[٦] إذا كان (٣ ، ٦) يحقق العلاقة ص = ك س فأوجد قيمة ك [٢]

[٧] إذا كان (٢ ، ك) يحقق العلاقة ص – ٣ س = ١ أوجد قيمة ك [٧]

[٨] مثل بيانيا كلا من العلاقات الاتية

(١) ص = ٢ س –٣ (٢) ص = س +٢

(٣) ص – س = ٣ (٤) ص = - ٢ س



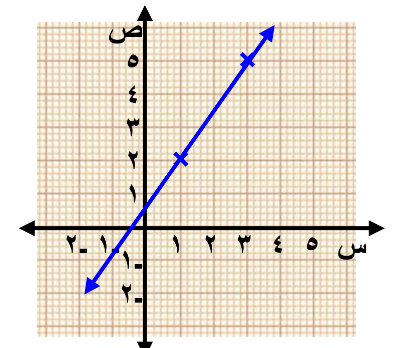
ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم :-

(١) بمعلومية نقطتين :-

المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

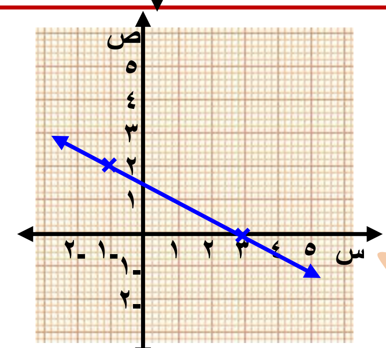
يكون ميله م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الافقى}}$ = $\frac{\text{التغير فى الاحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الاحداثى السينى}}$



مثـــال : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــل

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٥ - ٢}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$



مثـــال : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

الحـــل

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٠ - ٢}{٣ - (-١)}$ = $\frac{-٢}{٤}$ = $\frac{-١}{٢}$

مثـــال : إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٥ ، ص) يساوى ٢ أوجد قيمة ص

الحـــل

م = $\frac{ص - ٣}{٥ - ١}$ = ٢ ⟸ $\frac{ص - ٣}{٤}$ = ٢

ص – ٣ = ٨ ⟸ ص = ٨ + ٣ = ١١

ملاحظات :-

(١) ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى = صفر

(٢) ميل أى مستقيم يوازى محور السينات = صفر

(٣) ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى = غير معرف

(٤) ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات = غير معرف

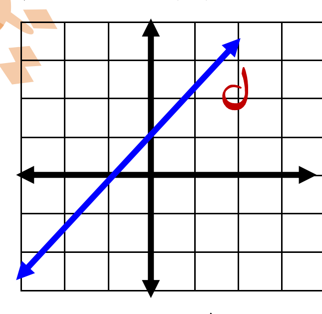
(٥) معادلة محور السينات ص = ٠

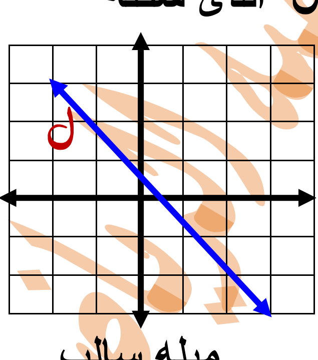
(٦) معادلة محور الصادات س = ٠

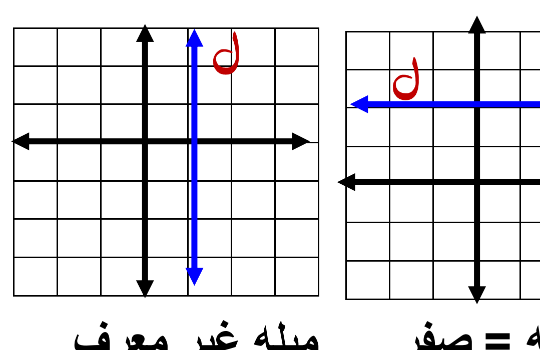
(٧) معادلة أى مستقيم يوازى محور السينات هى ص = ثابت

(٨) معادلة أى مستقيم يوازى محور الصادات هى س = ثابت

(٩) المستقيم ل الذى شكله







ميله موجب ميله سالب



ميله = صفر ميله غير معرف

ملاحظة :-

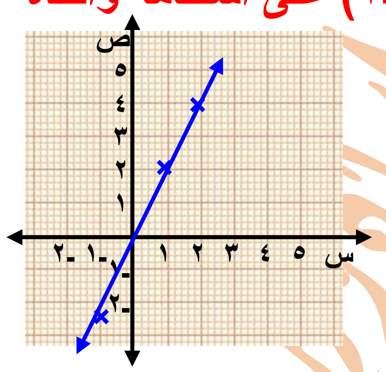
١- ميل أى مستقيم ثابت لا يتوقف على النقطتين

٢- لاثبات أن م، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة أو تنتمى لمستقيم واحد

نثبت أن ميل م ب = ميل ب جـ

م م ب = م ب جـ

مثـــال: إثبت أن النقط م = (١، ٢)، ب = (٢، ٤)، جـ = (ــ١ ، ــ٢) على أستقامة واحدة



الحــــل

ميل م ب = $\frac{٤ - ٢}{٢ - ١}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

ميل ب جـ = $\frac{٨ - ٤}{٤ - ٢}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

ميل م ب = ميل ب جـ ∴ م ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

مثـــال : إذا كانت النقط أ(-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (٧ ، ك)
تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحـــل

أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ∴ ميل أب = ميل ب جـ

م$_{أب}$ = م$_{ب جـ}$ ⇐ $\frac{١ - ٢}{٣ + ١} = \frac{ك - ١}{٧ - ٣}$

$\frac{-١}{٤} = \frac{ك - ١}{٤}$ ⇐ ك ـ ١ = -١ ∴ ك = صفر

مثـــال : إذا كانت أ = (٤ ، -٣) ، ب = (-٦ ، ك) ، جـ = (٥ ، -٤)
تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحـــل

أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ⇐ ميل أ ب = ميل أ جـ

$\frac{ك + ٣}{-٦ - ٤} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤}$ ⇐ $\frac{ك + ٣}{-١٠} = \frac{-١}{١}$

ك +٣ = ١٠ ⇐ ك = ١٠ ـ ٣ = ٧

مثـــال : إذا كانت أ = (-٢ ، ك) ، ب = (٢ ، ٤) ، جـ = (٦ ، -٤)
تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك

الحـــل

أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ⇐ ميل أب = ميل ب جـ

$\frac{ك - ٤}{-٢ - ٢} = \frac{-٤ - ٤}{٦ - ٢}$ ⇐ $\frac{ك - ٤}{-٤} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

ك ـ ٤ = ٨ ⇐ ك = ٨ + ٤ = ١٢

تمارين على ميل الخط المستقيم

[١] عين ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط الاتية

(١) (٢ ، ١) ، (٤ ، ٥) (٢) (-١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

(٣) (٠ ، ٤) ، (٥ ، ٠) (٤) (-١ ، -٢) ، (-٣ ، ٥)

(٥) (٠ ، ٣) ، (٤ ، ٧) (٦) (٣ ، -١) ، (-٢ ، ٤)

[٢] فى الشكل المقابل ؍ ب جـ مثلث فيه ب جـ // محور السينات

حدد نوع ميل كلا من المستقيمات الاتية من حيث

(موجب – سالب – صفر – غير معرف)

(١) ميل ؍ ب .... (٢) ميل ؍جـ ....

(٣) ميل ب جـ .... (٤) ميل ب ء ....

[٣] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٢) ، (٣ ، ك) يساوى ٢ أوجد قيمة ك

[٤] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (-٢،٤) ، (١ ، ك) يساوى ٥ أوجد قيمة ك

[٥] أكمل ما ياتى

١- ميل محور السينات وأى مستقيم يوازيه (أفقى) = ...

٢- ميل محور الصادات وأى مستقيم يوازيه (رأسى) = ...

٣- المستقيم س = ٤ يوازى محور .... ويكون ميله = ...

٤- ميل المستقيم العمودى على محور السينات = ...

٥- ميل المستقيم العمودى على محور الصادات = ...

٦- المستقيم س = ٣ يقطع محور السينات فى النقطة ....

[٦] أوجد ميل المستقيمات التى تمر بكل زوج من النقط الاتية

(١) أ (١ ، ٣) ، ب = (٣ ، ٤) (٢) س(٣ ، ٢) ، ص = (٥ ، ٧)

(٣) ف(-٢ ، ١) ، ق (٣ ، ٤) (٤) م (٣ ، -١) ، ن (٥ ، ٢)

[٧] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٥) ، (٤ ، ك) يوازى محور السينات أوجد قيمة ك [ك = ٥]

[٨] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٤) ، (ك ، ٦) يوازى محور الصادات أوجد قيمة ك [ك = ٣]

[٩] أثبت أن ؍ ،ب ،جـ تقع على أستقامة واحدة ؍=(١، ١)، ب = (٣،٣)،جـ = (٦،٦)

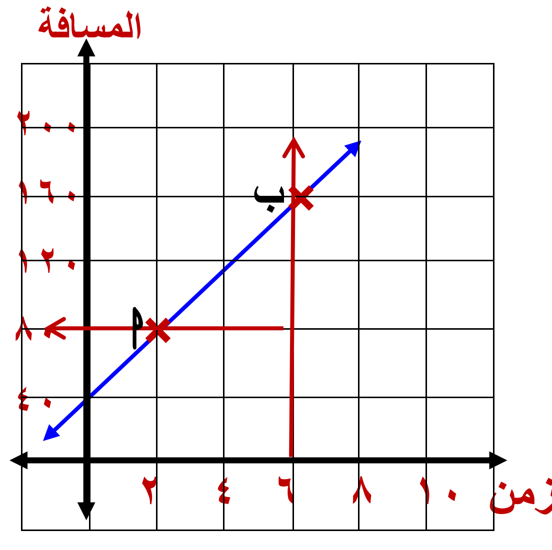
[١٠] إذا كانت النقط ؍ = (١ ، ٢) ، ب = (٢ ، ٤) ، جـ = (٤ ، ص) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ص

تطبيقات حياتية على ميل المستقيم

مثـــال : الشكل البيانى المقابل يمثل حركة سيارة من النقطة أ إلى النقطة ب

مقيسة(ف) بالمتر والزمن (ن) بالثانية

سرعة السيارة = ميل المستقيم أ ب



ميل أ ب = التغير الرأسى / التغير الأفقى

نعين أ (٢ ، ٨٠) ، ب (٦ ، ١٦٠)

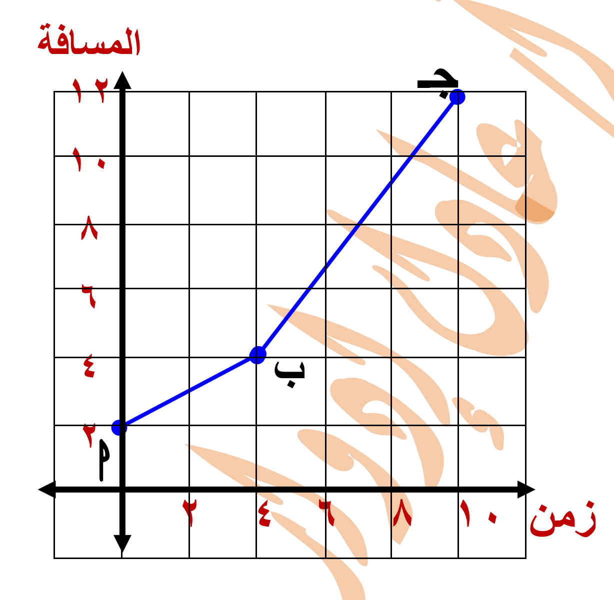
ميل أ ب = (١٦٠ ـ ٨٠) / (٦ ـ ٢) = ٨٠ / ٤ = ٢٠ م/ث

المسافة المقطوعة بعد ٨ ثوان من بداية الحركة

= ٢٠٠ متر

مثـــال : الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالمتر والزمن (ن) بالثانية

الحـــل



السرعة فى المسافة من أ إلى ب

= ميل المستقيم أ ب

= ميل أ ب = التغير الرأسى / التغير الأفقى

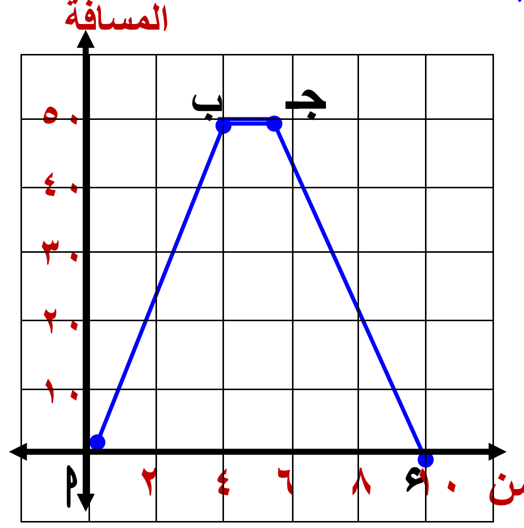
= (٤ ـ ٢) / (٤ ـ ٠) = ٢ / ٤ = ١ / ٢ متر / ث

السرعة فى المسافة من ب إلى جـ

ميل ب جـ = (١٢ ـ ٤) / (١٠ ـ ٤) = ٦ / ٤ = ٣ / ٢ متر/ث

مثـــال : تحرك وليد بدراجته من القاهرة إلى بنها ثم عاد

سرعت وليد خلال رحلة الذهاب = ميل المستقيم م ب



نعين م (٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٥٠)

الميل = التغير الرأسى / التغير الأفقى = (٥٠ ـ ٠) / (٤ ـ ٠) =١٢,٥ كم/ س

السرعة تزدات بمرور الزمن

سرعته خلال رحلة العودة

نعين جـ (٥ ، ٥٠) ، ء (١٠ ، ٠)

ميل جـ ء = (٠ ـ ٥٠) / (١٠ ـ ٥) = ـ ٥٠ / ٥ = ـ ١٠ كم/س

وتكون السرعة تقل بمرور الزمن

الفترة من ب إلى جـ تعنى توقف الحركة لمدة ساعة من الساعة الرابعة إلى الخامسة



الوحدة الثالثة : الاحصاء

جمع البيانات وتنظيمها

** لدراسة ظاهرة ما نتبع الآتى :

* نجمع البيانات من مصادرها
* تنظم البيانات وتعرض فى جداول تكرارية
* نستخدم أحدى الطرق الإحصائية لتحليل البيانات
* نفسر النتائج التى توصلنا إليها
* نقدم المقترحات لعلاج هذه الظاهرة

** أنواع البيانات وطرق جمعها

* بيانات إبتدائية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام كشوف الملاحظة والإستبيانات
* بيانات ثانوية : وهى البيانات المجمعة من الإنترنت ، الكتب ، الوثائق ، النشرات الإحصائية
* بيانات تجريبية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام التجارب لإختبار نظرية

** لتنظيم البيانات وعرضها فى جداول تكرارية نتبع الخطوات التالية :

* نوجد أكبر قيمة و أصغر قيمة لهذه البيانات
* نوجد المدى : حيث المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة
* نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ولتكن ٦ مجموعات
* مدى المجموعة = مدى البيانات ÷ ٦
* تسجل البيانات فى جدول التفريغ المكون من ثلاثة أعمدة :

عمود المجموعات   عمود العلامات   عمود التكرار

* نحذف عمود العلامات فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات

مثال : البيان التالى الدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالب فى أحد الإختبارات :

٧	١٠	٧	٤	٥	٨	٦	٧	١٣	١٢
٢	٩	١١	١٢	١١	٩	١٥	١٢	١٣	٩
٥	١٤	١٩	٣	٩	١٤	٣	١٣	٨	١٧

والمطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات

الحـــــــــل

أكبر قيمة لهذه البيانات = ١٩ ، اصغر قيمة = ٢

المدى = ١٩ ــ ٢ = ١٧

نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ليكن ٦ مجموعات

مدى المجموعة = ١٧ ÷ ٦ ≈ ٣

تصبح المجموعات الجزئية كالآتى : ٢ ــ ، ٥ ــ ، ٨ ــ وهكذا

المجموعات	العلامات	التكرار
المجموعات	العلامات	التكرار
٢ ــ	𝍸	٤
٥ ــ	𝍸 /	٦
٨ ــ	𝍸 //	٧
١١ ــ	𝍸 ///	٨
١٤ ــ	///	٣
١٧ ــ	//	٢
المجموع		٣٠

يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات ويمكن كتابته رأسياً أو أفقياً والصورة الأفقية للجدول هى :

لاحظ : ٢ ــ تعنى أن مجموعة البيانات ≥ ٢ و < ٥

** تسجل البيانات فى الجدول التالى :

المجموعة	٢ ــ	٥ ــ	٨ ــ	١١ ــ	١٤ ــ	١٧ ــ	المجموع
التكرار	٤	٦	٧	٨	٣	٢	٣٠

تدريب ١ : كون جدول تكرارى ذى مجموعات للبيانات الآتية :

٤٣	٣٣	٣١	١٥	٤٤	٢٤	٣٤	٣٩	٢٧	٣٨
٤٢	٢٥	٢٩	٢١	٢٩	٣٠	٣٣	٢٦	٣٣	٣٧
٤٠	٢٦	٣٢	٢١	٢٥	٣٠	٣٦	٣٢	٢٣	٣٦
٢٩	٣٥	٢٧	٣٤	٢٨	٢٢	٣١	١٩	٢٨	٣١

تمارين

١ – أكمل ما يأتى :

(١) من أنواع البيانات .... ، .... , ...

(٢) المدى لمجموعة من القيم = ...

(٣) جدول التفريغ يتكون من .... ، .... , ...

(٤) الجدول التكرارى ذى المجموعات يتكون من .... ، ....

(٥) نحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات من جدول التفريغ بحذف عمود ...

٢ – البيانات التالية تبين درجات الحرارة المئوية فى ٢٠ يوماً متتالية من أيام السنة كون جدول تكرارى لهذه البيانات

١٧	١٠	٢٣	٢٨	١٢	٣٥	١٥	٣٦	٣٣	١٤
٣٢	٨	٣٣	٣٥	١٣	١٥	٢٧	٢٢	٣٥	١٦

٤- من البيانات التالية كون جدول تكرارى لهذه البيانات

٤٣	٣٣	٣١	١٥	٤٤	٢٤	٣٤	٣٩	٢٧	٣٨
٤٢	٢٥	٢٩	٢١	٢٩	٣٠	٣٣	٢٦	٣٣	٣٧
٤٠	٢٦	٣٢	٢١	٢٥	٣٠	٣٦	٣٢	٢٣	٣٦
٢٩	٣٥	٢٧	٣٤	٢٨	٢٢	٣١	١٩	٢٨	٣١
٤٣	٣٣	٣١	١٥	٤٤	٢٤	٣٤	٣٩	٢٧	٣٨
٤٢	٢٥	٢٩	٢١	٢٩	٣٠	٣٣	٢٦	٣٣	٣٧
٤٠	٢٦	٣٢	٢١	٢٥	٣٠	٣٦	٣٢	٢٣	٣٦
٢٩	٣٥	٢٧	٣٤	٢٨	٢٢	٣١	١٩	٢٨	٣١

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيا

(١) الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و تمثيله بيانياً :

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

ا لمجموعات	١٨ –	٢٤ –	٣٠ –	٣٦ –	٤٢ –	٤٨ –	٥٤ –	المجموع
ا لتكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

الحـــــــل

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد :

نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود العليا للمجموعات ،

والعمود الثانى للتكرار المتجمع الصاعد و نبدأ بالتكرار صفر لماذا ؟

ثم نجمع التكرارات بالتتابع

وللتمثيل البيانى :

نخصص المحور الأفقى للمجموعات ، والمحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد

نختار مقياس رسم مناسب للتكرار المتجمع الصاعد بحيث يتسع المحور الرأسى للتكرار الكلى الصاعد عدد عناصر المجموعة

نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البيانى لها بالتتابع

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد	أجمع ↓
أقل من ١٨	صفر	
أقل من ٢٤	٢ + ٠ = ٢	٢
أقل من ٣٠	٢ + ٤ = ٦	٤
أقل من ٣٦	٦ + ١٠ = ١٦	١٠
أقل من ٤٢	١٦+ ١٨= ٣٤	١٨
أقل من ٤٨	٣٤+ ٨ = ٤٢	٨
أقل من ٥٤	٤٢+ ٦= ٤٨	٦
أقل من ٥٨	٤٨ ٢= ٥٠	٢

(٢) الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيله بيانياً :

كون الجدول التكرارى المتجمع النازل لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

المجموعات	١٨ ــ	٢٤ ــ	٣٠ ــ	٣٦ ــ	٤٢ ــ	٤٨ ــ	٥٤ ــ	المجموع
التكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

الحـــــــل

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل :

نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود السفلى للمجموعات ،

والعمود الثانى للتكرار المتجمع النازل و نبدأ بمجموع التكرارات لماذا ؟

ثم نطرح التكرارات بالتتابع أو نبدأ من آخر مجموعة بالتكرار صفر ونجمع التكرارات بالتتابع من أسفل لأعلى

وللتمثيل البيانى : نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل	أطرح ↓
١٨ فأكثر	٥٠	٢
٢٤ فأكثر	٥٠ ـ ٢ = ٤٨	٤
٣٠ فأكثر	٤٨ ـ ٤ = ٤٤	١٠
٣٦ فأكثر	٤٤ ـ ١٠ = ٣٤	١٨
٤٢ فأكثر	٣٤ ـ ١٨ = ١٦	٨
٤٨ فأكثر	١٦ ــ ٨ = ٨	٦
٥٤ فأكثر	٨ ــ ٦ = ٢	٢
٥٨ فأكثر	٢ ــ ٢ = صفر	

تمارين

١ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع ا لتكراري لدرجات ٦٠ طالباً في إحدى ا لمواد

مجموعات ا لدرجات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	ا لمجموع
عدد ا لطلاب	٣	١٣	١٧	٢٣	٥	٦٠

أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لنازل

٢ – أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد للتوزيع ا لتكراري الآتي :

ا لمجموعات	٢ –	٤ –	٦ –	٨ –	١٠ –	١٢ –	ا لمجموع
ا لتكرار	٥	١٥	٣٠	٢٤	١٧	٩	١٠٠

٣ – الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في إمتحان إحدى المواد

المجموعات	٠ –	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	٨	١٤	١٥	٢٨	٢٣	١٢	١٠٠

أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل

أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة ، الحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر

النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة

٤ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع ا لتكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

المجموعات	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ –	٥٠ –	ا لمجموع
التكرار	٥	٨	٩	١٢	.....	٥	٢	٥٠

أكمل الجدول

* أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل
* عدد العمال الذين أعمارهم ٣٥ سنة فأكثر
* عدد العمال الذين أعمارهم أقل من ٣٥ سنة

الوسط الحسابى

تعريف :

الوسط الحسابى هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة " قيمة " من مفردات " قيم " المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية

الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$

مثـــال : أوجد الوسط الحسابى للقيم : ٣ ، ٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ٧ ، ١١ ، ٢

الوسط الحسابى = $\frac{٣ + ٥ + ١٧ + ١٨ + ٧ + ١١ + ٢}{٧} = \frac{٦٣}{٧} = ٩$

الوسط الحسابى لبيانات جدول تكرارى ذى مجموعات :

الخطوات : تتضح الخطوات من المثال الآتى :

مثـــال: أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –
التكرار	٢	٨	١٧	٢٣	٧	٣

نحدد مراكز المجموعات (م) م = $\frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى للمجموعة}}{٢}$

∴ مركز المجموعة الأولى = $\frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$

، حيث أن مدى المجموعات = ١٠

∴ نضيف ١٠ لمراكز المجموعات بالتتابع و نكون الجدول الآتى :

المجموعات	مركز المجموعة م	التكرار ك	م × ك
١٠ –	١٠	٢	٢٠
٢٠ –	٢٥	٨	٢٠٠
٣٠ –	٣٥	١٧	٥٩٥
٤٠ –	٤٥	٢٣	١٠٣٥
٥٠ –	٥٥	٧	٣٨٥
٦٠ –	٦٥	٣	١٩٥
المجموع		٦٠	٢٤٣٠

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}} = \frac{٢٤٣٠}{٦٠} = ٤٠,٥$

مثـــال : أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

المجموعات	١٦ ــ	٢٠ ــ	٢٤ ــ	٢٨ ــ	٣٢ــ	٣٦ ــ
التكرار	٣	٥	١٢	٧	٢	١

، حيث أن مدى المجموعات = ٤

∴ نضيف ٤ لمراكز المجموعات بالتتابع و نكون الجدول الآتى :

المجموعات	مركز المجموعة م	التكرار ك	م × ك
١٦ ــ	١٨	٣	٥٤
٢٠ ــ	٢٢	٥	١١٠
٢٤ ــ	٢٦	١٢	٣١٢
٢٨ ــ	٣٠	٧	٢١٠
٣٢ــ	٣٤	٢	٦٨
٣٦ ــ	٣٨	١	٣٨
	المجموع	٣٠	٧٩٢

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع (ك × م)}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{٧٩٢}{٣٠}$ = ٢٦,٤

تمـــارين

١ ــ أوجد الوسط الحسابى لكل من مجموعات القيم الآتية :

(١) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٢ ، ١٣ ، ٥

(٢) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ٨

(٣) ٢٣ ، ٤٧ ، ٢٤ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ١٦

(٤) ٦ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٨ ، ١٠

(٢) أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

المجموعات	٦٠ ــ	٧٠ ــ	٨٠ ــ	٩٠ ــ	١٠٠ــ	١١٠ ــ
التكرار	٤	١٦	١٨	٢٥	١٨	١٩

(٣) أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

المجموعات	٥ ــ	١٥ ــ	٢٥ــ	٣٥ ــ	٤٥ــ	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

الوســيط

تعريف :

الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة المفردات " القيم " بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

خطوات إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى :

ننشأ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له

نحدد ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢}$

نحدد نقطة على المحور الرأسى " التكرار المتجمع " والتى تمثل ترتيب الوسيط ثم نرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع فى نقطة نرسم منها عموداً على المحور الأفقى فيقطعه فى نقطة تمثل الوسيط

" وإذا رسمنا المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً فإن الإحداثى الأفقى لنقطة تقاطعهما تمثل الوسيط "

مثـــــال : أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :

المجموعات	١٨ –	٢٤ –	٣٠ –	٣٦ –	٤٢ –	٤٨ –	٥٤ –	المجموع
التكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

الحــــل

عن طريق المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٨	صفر
أقل من ٢٤	٢
أقل من ٣٠	٦
أقل من ٣٦	١٦
أقل من ٤٢	٣٤
أقل من ٤٨	٤٢
أقل من ٥٤	٤٨
أقل من ٥٨	٥٠

التكرار المتجمع

٥٠ ٤٥ ٤٠ ٣٥ ٣٠ ٢٥ ٢٠ ١٥ ١٠ ٥

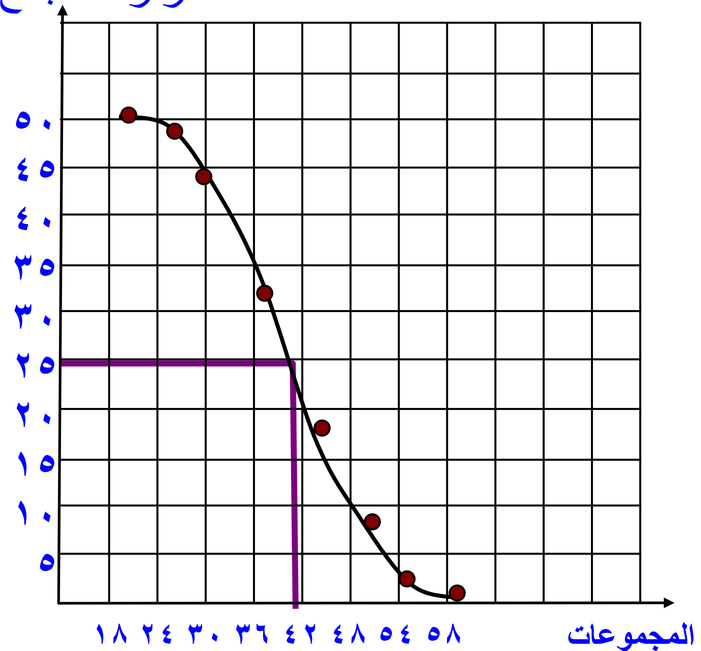
١٨ ٢٤ ٣٠ ٣٦ ٤٢ ٤٨ ٥٤ ٥٨ المجموعات

ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

من الرسم الوسيط = ٤٠,٦

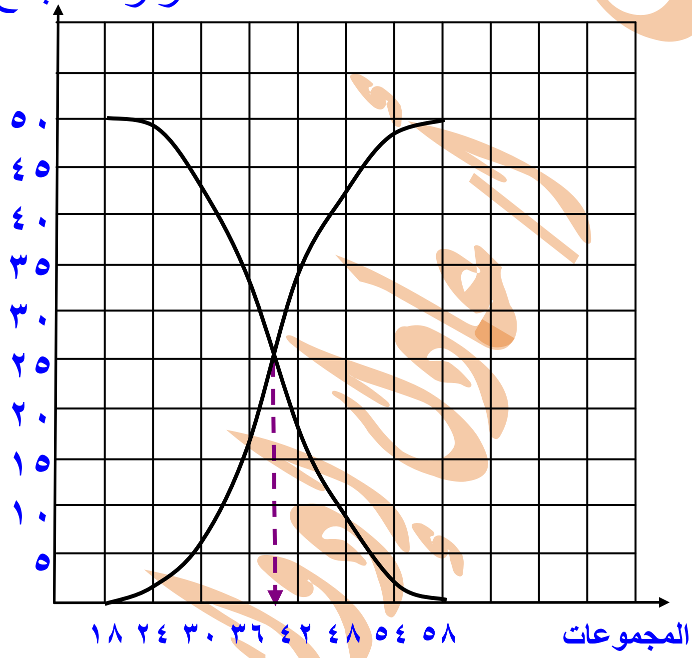
من المنحنى التكرارى المتجمع النازل

الحدود السفلى للمجموعات	التكرار المتجمع النازل
١٨ فأكثر	٥٠
٢٤ فأكثر	٤٨
٣٠ فأكثر	٤٤
٣٦ فأكثر	٣٤
٤٢ فأكثر	١٦
٤٨ فأكثر	٨
٥٤ فأكثر	٢
٥٨ فأكثر	صفر



ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

من الرسم الوسيط = ٤٠,٦



من المنحنيين معاً :

من الرسم وملاحظة نقطة تقاطع المنحنيين

يكون الوسيط = ٤٠,٦

تمـــارين

(١) التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالباً فى أحدى الاختبارات

المجموعات	٢ ــ	٤ ــ	٦ ــ	٨ ــ	١٠ ــ	المجموع
التكرار	٢	٢٠	١٢	٩	٧	٥٠

أوجد الوسيط لهذا التوزيع مستخدماً جدول التكرار المتجمع الصاعد:

(٢) فيما توزيع الأجور لبعض العاملين فى أحدى المصانع
أرسم منحنى التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم اوجد الأجر الوسيط

الأجور	٣٠٠ ــ	٤٠٠ ــ	٥٠٠ــ	٦٠٠ ــ	٧٠٠ــ	المجموع
عدد العمال	٨	١٢	١٨	٧	٥	٥٠

(٣) من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى أوجد

المجموعات	٥ ــ	١٥ ــ	س ــ	٣٥ ــ	٤٥ــ	المجموع
التكرار	١٨	ك	٢٣	٣٠	١٢	١٠٠

أوجد قيمة س ، ك ثم أوجد الوسيط

(٤) من الجدول التكرارى التالى

المجموعات	١٦ ــ	٢٠ ــ	٢٤ ــ	٢٨ ــ	٣٢ ــ	٣٦ ــ
التكرار	١	٧	١٢	٥	٣	٢

أرسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط

(٥) من الجدول التكرارى التالى ، احسب الوسيط

المجموعات	٣٠ ــ	٦٥ ــ	٧٠ ــ	٧٥ ــ	٨٠ ــ	المجموع
التكرار	١	٥	١٥	٧	٢	٣٠

(٦) من الجدول التكرارى التالى ، احسب الوسيط

المجموعات	١٥ ــ	٢٠ ــ	٢٥ــ	٣٠ ــ	٣٥ــ	٤٠ ــ
التكرار	١٠	١٥	٢٢	٢٥	٢٠	٨

المنـــوال

تعريف :

المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً فى مجموعة المفردات " القيم "
أى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها من القيم

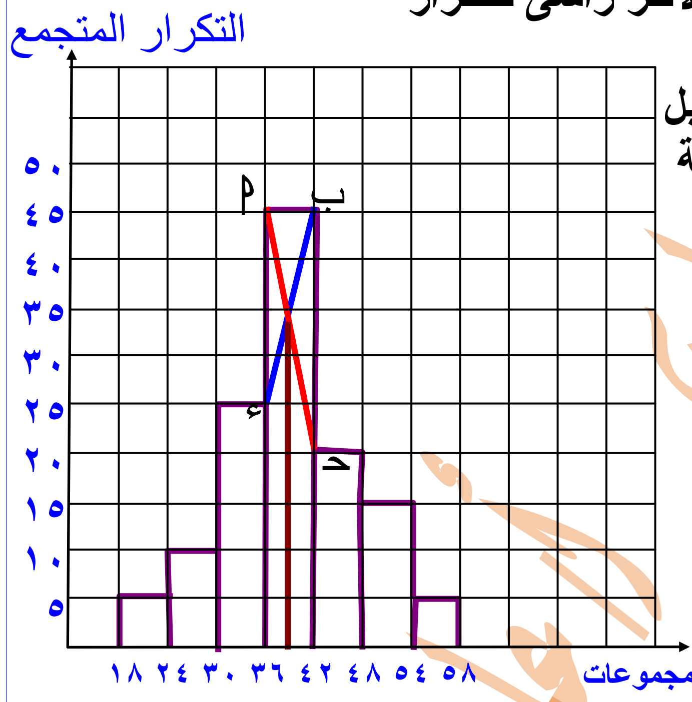
لإيجاد المنوال لجدول تكرارى ذى مجموعات لاحظ المثال الآتى :

مثـــــال : أوجد المنوال للجدول التكرارى الآتى :

ا لمجموعات	١٨ ــ	٢٤ ــ	٣٠ ــ	٣٦ ــ	٤٢ ــ	٤٨ ــ	٥٤ ــ	المجموع
ا لتكرار	٢	٤	١٠	١٨	٨	٦	٢	٥٠

نرسم المدرج التكرارى كالآتى :

نرسم محورين أحدهما أفقى للمجموعات والآخر رأسى للتكرار
نستخدم مقياس رسم مناسب للمحورين
نرسم مستطيلات متلاصقة كما بالشكل المقابل
بحيث يكون عرض كل منها مدى المجموعة
طول كل منها تكرار المجموعات بالترتيب



إيجاد المنوال :

المنوال يتحدد من المجموعة المنوالية وهى الأكثر تكراراً
نحدد نقطة تقاطع $\overline{\text{م حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$
و نسقط منها عموداً على المحور الأفقى
يحدد القيمة المنوالية المنوال = ٤١

تمــــارين

أوجد المنوال لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(١)

المجموعات	٣ ــ	٤ ــ	٥ ــ	٦ ــ	٧ ــ	المجموع
التكرار	٣	٢٠	١٢	٩	٧	٥٠

(٢)

المجموعات	١٠ ــ	١١ ــ	١٢ ــ	١٣ ــ	١٤ ــ	١٥ ــ
التكرار	١	٤	٨	١٣	٣	١

(٣)

المجموعات	٥ ــ	١٥ ــ	٢٥ ــ	٣٥ ــ	٤٥ ــ	٥٥ ــ
التكرار	١٥	١٧	٢٣	٣٠	٢٢	٣

(٤)

المجموعات	٦٠ ــ	٦٥ ــ	٧٠ ــ	٧٥ ــ	٨٠ ــ	المجموع
التكرار	١	٥	١٥	٧	٢	٣٠

(٥)

المجموعات	١٦ ــ	٢٠ ــ	٢٤ ــ	٢٨ ــ	٣٢ ــ	٣٦ ــ
التكرار	١	٧	١٢	٥	٣	٢

(٦) الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى ذا المجموعات متساوية المدى لدرجات ٤٠ طالباً فى أحد الاختبارات

المجموعات	٣٠ ــ	٤٠ ــ	س ــ	٦٠ ــ	٧٠ ــ	٨٠ ــ
التكرار	٣	٤	١٢	٨	ك	٦

أوجد قيمة كل من س ، ك ثم أوجد الدرجة المنوالية